波动方程有限差分正演模拟误差来源分析

宁刚[1],熊章强[2],陈持逊[3]
(1.东华理工学院,江西 抚州 344000;2.中南大学,湖南 长沙 410083;3.湖南省核工业地质局,湖南 长沙 410011)

摘 要:有限差分波动方程正演数值模拟主要是解决差分格式、震源选择、边界条件处理等问题。这些问题的合理解决对得到正确和准确的波动方程数值解有着十分重要的作用。笔者通过对波动方程计算机有限差分正演模拟过程的叙述,分析了在做正演模拟时的误差来源以及如何有效地减小误差。

关键词:波动方程;正演模拟;有限差分;误差分析
中图分类号:P631.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-8918(2008)02-0203-04

波动方程有限差分模拟方法是波场数值模拟中最为流行的方法之一,但在用有限差分方法求解波动方程时,常常会产生不期望的数值频散或称网格频散,导致数值模拟结果分辨率的降低。所谓数值频散实质上是一种因离散化求解波动方程而产生的伪波动,它是有限差分方法求解波动方程时所固有的本质特征,无法避免,但是可以通过合适的参数选择和适当的数学方法予以减小。

在做有限差分波动方程正演数值模拟时主要是要综合考虑差分格式、震源的选择、边界条件的处理等问题。这些问题能否正确处理直接影响正演模拟结果的正确性,并且误差是由这些因素综合影响,如果其中任何一个问题得不到恰当地处理,都会给正演结果带来误差。笔者针对在做波动方程时遇到的几个问题展开讨论,叙述有限差分波动方程正演数值模拟的完整过程,以及如何有效的减小波动方程正演模拟误差。

1 波动方程正演算法

1.1 二维波动方程

非均匀介质的声波波动方程可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\delta(x,z,t)\text{。} \tag{1}$$

假设物质的密度不随空间变化,则方程可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\delta(x,z,t)\text{,} \tag{2}$$

$$\delta_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z}=\begin{cases}1, & x=x_0,z=z_0,t=t_0;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases} \tag{3}$$

其中,$\delta(x,z,t)$是Kronecker函数,表示震源项。当用有限宽频带子波$f(t)$作为震源时,只要将波动方程的解与子波做褶积就可得到以此子波为震源的解。

1.2 波动方程的高阶差分近似

利用泰勒公式将函数$v(t)$在$v(t+\Delta t)$和$v(t-\Delta t)$展开有

$$v(t+\Delta t)=v(t)+v'(t)(\Delta t)+\frac{1}{2!}v''(t)(\Delta t)^2+\frac{1}{3!}v'''(t)(\Delta t)^3+\frac{1}{4!}v^{(4)}(t)(\Delta t)^4+\cdots, \tag{4}$$

$$v(t-\Delta t)=v(t)-v'(t)(\Delta t)+\frac{1}{2!}v''(t)(\Delta t)^2-\frac{1}{3!}v'''(t)(\Delta t)^3+\frac{1}{4!}v^{(4)}(t)(\Delta t)^4+\cdots, \tag{5}$$

$$v(t+2\Delta t)=v(t)+v'(t)(2\Delta t)+\frac{1}{2!}v''(t)(2\Delta t)^2+\frac{1}{3!}v'''(t)(2\Delta t)^3+\frac{1}{4!}v^{(4)}(t)(2\Delta t)^4+\cdots, \tag{6}$$

$$v(t-2\Delta t)=v(t)-v'(t)(2\Delta t)+\frac{1}{2!}v''(t)(2\Delta t)^2-\frac{1}{3!}v'''(t)(2\Delta t)^3+\frac{1}{4!}v^{(4)}(t)(2\Delta t)^4+\cdots\text{。} \tag{7}$$

取到展开式的二阶项,令式(3)+式(4)得到二阶有限差分计算公式

$$v''(t)=\frac{v(t+\Delta t)-2v(t)+v(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}\text{。} \tag{8}$$

取到展开式的四阶项,令[(3)+(4)]×16-[(5)+(6)]式,得到四阶有限差分计算公式

收稿日期:2006-12-25
基金项目:江西省自然科学基金(05560003)及江西省科技攻关项目(2005)联合资助

$$v''(t) = [v(t+2\Delta t) + 16v(t+\Delta t) - 30v(t) + 16v(t-\Delta t) - v(t-2\Delta t)]/12(\Delta t^2)\ 。\quad (9)$$

按照上述方法将波动方程(2)展开得到空间域四阶时间域二阶波动方程有限差分格式

$$U(i,j,k+1) = (A_2/12) \times \{16 \times [U(i+1,j,k) + U(i-1,j,k) + U(i,j+1,k) + U(i,j-1,k)] - [U(i+2,j,k) + U(i-2,j,k) + U(i,j+2,k) + U(i,j-2,k)]\} + (2 - 5 \times A_2) \times U(i,j,k) - U(i,j,k-1)$$

$$A_2 = \left[V(i,j)\frac{\Delta t}{\Delta x}\right]^2, \qquad (10)$$

其中,i 表示 x 方程的离散网格,j 表示 z 方向的离散网格,k 表示 t 方向的离散网格,$V(i,j)$ 表示 (i,j) 这个网格节点的波速,上式假设在 x、z 方向的网格差分步长相等即令 $\Delta x = \Delta z$。

1.3 初值条件的处理

由波动方程的离散表达式可以看出此式实际上是一个递推公式,只要知道在时间间隔方向前面 2 层的值就能计算出第三层的值来,但是在最初的时刻波场的值是不知道的,因此在循环的开始必须考虑初始条件:

(1)当 $t \leqslant 0$ 时,有 $U(x,z,0)=0$,表示在初始时刻整个波场保持平静没有扰动。

(2)初始时刻波场的速度也为零,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\ , \qquad (11)$$

写成离散形式就有

$$\begin{cases} U_{i,j}^{k}\big|_{k=0} = U_{i,j}^{0} = 0 \\ \left.\dfrac{1}{\Delta t}(U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^{k})\right|_{k=0} = \dfrac{1}{\Delta t}(U_{i,j}^{l} - U_{i,j}^{0}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{i,j}^{0} = 0 \\ U_{i,j}^{l} = 0 \end{cases}。 \qquad (12)$$

有了波场的初始值就可以通过递推公式来计算波场任何时刻的值,波动方程算法流程见图 1。

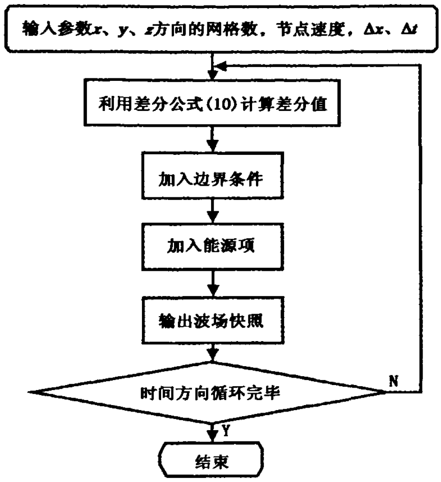

图1 波动方程算法流程

2 正演过程误差的来源

2.1 子波处理带来的误差

在有限差分计算过程中,子波也即震源函数的处理不当,会给计算结果带来较大的误差,甚至出现完全错误的结果。一般采用的子波有以下几种。

雷克子波:

$$f(t) = \left\{1 - 2\left[\pi f\left(t - \frac{1.5}{f}\right)\right]^2\right\} e^{-[\pi f(t-\frac{1.5}{f})]^2};$$

高斯子波:

$$f(t) = \left\{\left[\pi f\left(t - \frac{1}{f}\right)\right]^2\right\} e^{-2[\pi f(t-\frac{1}{f})]^2};$$

混合相位子波:

$$f(t) = \left\{\cos\left[\pi f\left(t - \frac{4}{f}\right)\right]\right\} e^{-\frac{1}{2}[f(t-\frac{4}{f})]}\ 。$$

在确定好子波函数后要对子波进行离散值点的计算,可将离散值直接加到计算中,也可以在计算完整个波场值后再与子波做褶积。由于有限差分时震源函数是以离散值的形式加入计算方程的,如果时间采样间隔 Δt 不能满足采样定理($\Delta t < 1/(2f)$,f 表示子波的频率),即 Δt 选择较大,那么将会使子波的波形发生畸变,或者根本就采不到完整的子波,从而不仅会引起误差,甚至可能导致错误的计算结果。同样如果空间采样不能满足采样定理,即 Δx、Δz 的采样要小于半个波长,同样会引起计算结果的误差甚至错误。例如选用子波的频率为 10 Hz,速度为 1 000 m/s 那么就要求 $\Delta t \leqslant 50$ ms,Δx、$\Delta z \leqslant 50$ m,这也是为什么在做正演模拟时较高的子波频率难于实现的原因。因此在子波的选取以及 Δt、Δx、Δz 的选取时,既考虑差分网格的稳定性,又要考虑采样定理。

2.2 差分阶数对结果的影响

有限差分波动方程的解存在误差。根据泰勒展开式可知,二阶差分的误差为 $O(\Delta t^2 + \Delta t^2)$,空间域四阶时间域二阶有限差分的误差为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$,可以看出阶数越高有限差分的解越精确。

如图 2a、图 2b 是在相同的条件下($\Delta t = 0.002$ s, $\Delta x = 5$ m,$f = 20$ Hz)$t = 300$ ms 时的波场快照,子波选用高斯子波,只是图 2a 采用二阶差分,图 2b 采用时间域二阶空间域四阶差分。可以看出二阶差分有很明显的空间假频现象,即在最外边第一个波长后里面又出现许多的次生波,而四阶差分则效果较

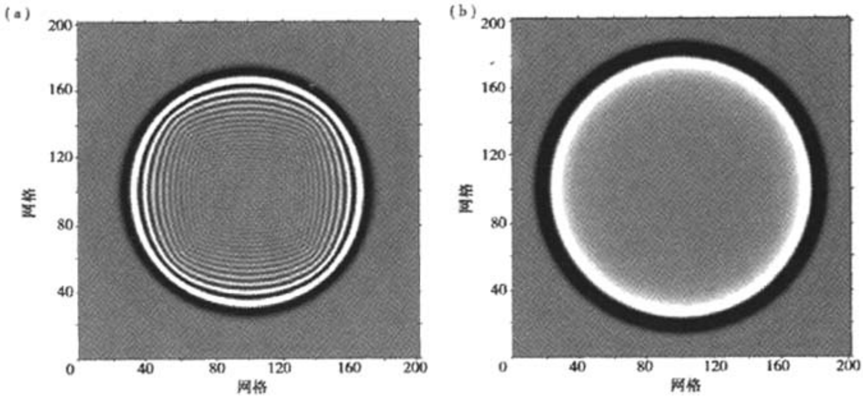

图 2　二阶差分(a)及四阶差分(b)的计算结果

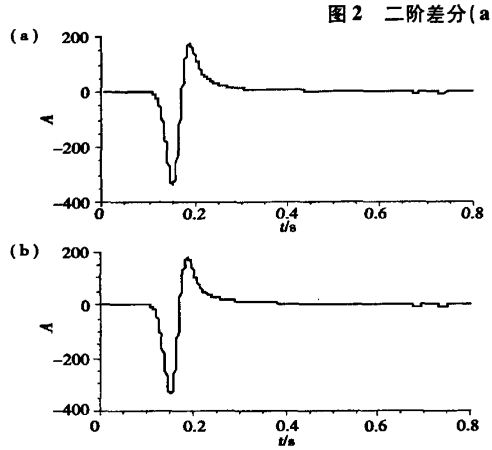

图 3　Δx、Δz 均为 3 m 时的质点随时间的震动

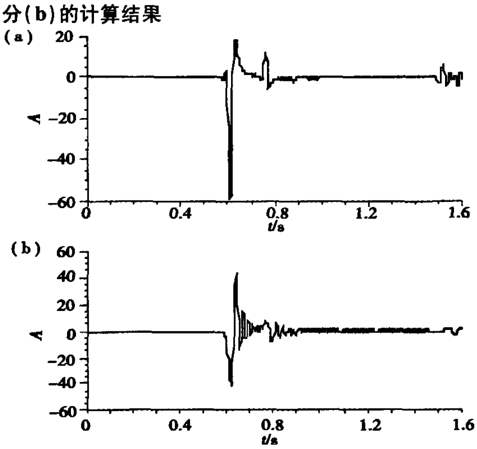

图 4　Δx、Δz 均为 5 m 时的质点随时间的震动

好,只有 1 个较强的波,包括 1 个正波峰和 1 个负波峰。如图 3,图 4 是质点随时间的震动图,在图 3a、图 4a 都是空间域四阶时间域二阶差分计算的结果,图 3b、图 4b 都是空间域二阶时间域二阶差分计算的结果。图 4 是 $\Delta x = \Delta z = 5$ m 时网格节点(20,20)的震动状态。从图中可以看出除了球面扩散对波形的影响外,四阶差分的频散明显小于二阶。图 3 是令 $\Delta x = \Delta z = 3$ m 时网格节点(100,100)的质点震动状态,可以看出二阶差分同四阶差分的效果基本相同。因此减小 Δx、Δz 也可以提高解的精确度,如果 Δx、Δz 选择不当则会引起较强的假频,甚至错误的结果。

2.3　边界条件的影响

在做数值模拟时由于在计算机上实现的计算空间是有限的,这样无形中就加入了人工边界,当波动传播到边界时就会引起反射,如图 5b 可以看出有明显的边界反射。

为了去除这种反射必须在边界上加入边界条件。Clayton 和 Engquist(1980 年)提出了下列边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

其中,v 是波的传播速度,a,b 是参数。以上是右边的边界条件,左边界只要把 b 换成 $-b$ 即可。图 5a 就是加了边界条件后的情形,其中取 $a = 1$,$b = 2 - \sqrt{3}$。从图中可以看到边界反射明显地减弱了。

图 3、图 4 也是加了边界条件后的计算结果。在图 3 中,从 0.65 s 以后仍可看到边界反射,但是比较弱。图 4 中也有同样的现象,在 1.5 s 后还记录到边界的反射,但是能量较强,也就是说网格间距的选择也会影响边界的处理效果。

3　结论及建议

高阶有限差分法在做波动方程正演模拟时,具有计算速度快、频散较小的特征,在做有限差分正演过程中必须注意震源、边界条件等因素的影响,否则就会出现意想不到的结果。总体来说选择较小的空间和时间步长能保证结果的正确性,但是时间和空间的步长的减小必定增加运算的时间,因此要保证运算速度与精度就必须处理好各个参数之间的关

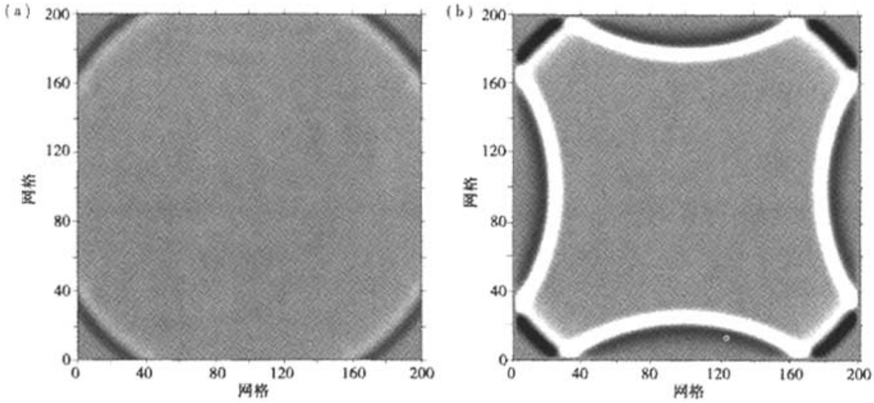

图5 加上边界条件(a)及不加边界条件(b)时的波动传播

系,另外高阶的差分也能减小数值计算带来的频散,但同样高阶差分也会增加计算时间,因此要在计算速度和精度之间做出合适的选择。

笔者只是对均匀介质中数值模拟时所要注意的问题提出讨论,如果在层状或是非均匀介质中,就要考虑速度模型的离散问题和子波的分辨率等问题。地质体越小要求子波的频率越高,网格要划分的要越细致,否则就达不到理想的效果。

参考文献:

[1] 马在田,曹景忠,王家林,等.计算地球物理概论[M].上海:同济大学出版社,1997.

[2] 夏凡,董国良,马在田.三维弹性波数值模拟中的吸收边界条件[J].地球物理学报,2004:47(1).

[3] 马德堂,朱光明.虚谱法求解波动方程的算法改进[J].西安工程学院学报,2000:22(2).

[4] 王永刚,朱照林.裂缝各向异性介质中P-SV转换波正演模拟[J].石油物探,2005:44(1).

[5] 吴清岭,张平,施泽龙.波动方程正演模拟即应用[J].大庆石油地质与开发,1998,17(3).

[6] Pakbaz M C, Yareevand A. 2-D analysis of circular tunnel against earthquake loading[J]. Tunneling and Underground Space Technology,2005,20:411.

[7] Hong Tae-Kyung, Kennett B L N. A wavelet-based method for simulation of two-dimensional elastic wave propagation[J]. Geophys J Int,2002,150:610.

[8] Ruud B, Hestholm S. 2D surface topography boundary conditions in seismic wave modeling[J]. Geophysical Prospecting,2001,49:445.

[9] Komatisch D, Tromp J. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second order seismic wave equation Geophysics[J]. J Int,2003,154:146.

[10] Hestholm S, Ruud B. 3D free boundary conditions for coordinate transform finite difference seismic modeling[J]. Geophysical Prospecting,2002,50:463.

AN ANALYSIS OF THE ERROR SOURCE IN THE WAVE PROPAGATION FORWARD NUMERICAL SIMULATION

NING Gang[1], XIONG Zhang-qiang[2], CHEN Chi-xun[3]

(1. *East China Institute of Technology, Fuzhou* 344000, *China*; 2. *Central South University, Changsha* 410083, *China*; 3. *Hunan Province Geological Bureau of Nuclear Industry, Changsha* 410011, *China*)

Abstract: The forward numerical simulation of the finite difference wave equation is mainly used to solve such problems as difference scheme, focal choice and boundary condition processing. The solution of these problems can play an important role in correct numerical simulation of the wave equation. Based on discussing the forward numerical simulation course of the finite difference wave equation, the authors analyzed the error source in forward simulation and the means for reducing the error.

Key words: wave equation; forward simulation; finite difference method; error analysis

作者简介:宁刚(1982-),男,东华理工学院研究生,地球探测与信息技术专业,目前主要从事工程地球物理理论及应用方面的研究工作,公开发表学术论文数篇。