

doi: 10.11720/wtyht.2020.1388

王静波, 熊盛青, 罗锋, 等. 航空重力测量数据的小波滤波处理[J]. 物探与化探, 2020, 44(2): 300-312. <http://doi.org/10.11720/wtyht.2020.1388>  
Wang J B, Xiong S Q, Luo F, et al. Wavelet filter processing in airborne gravimetry[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2020, 44(2): 300-312. <http://doi.org/10.11720/wtyht.2020.1388>

# 航空重力测量数据的小波滤波处理

王静波<sup>1</sup>, 熊盛青<sup>2</sup>, 罗锋<sup>2</sup>, 王冠鑫<sup>2</sup>

(1. 北方工业大学 理学院, 北京 100144; 2. 中国自然资源航空物探遥感中心, 北京 100083)

**摘要:**“滤波技术”是航空重力测量数据处理中的关键性核心技术之一。针对“小波”滤波这一核心技术, 本文研究、设计了小波低通滤波器, 用于航空重力测量数据处理。基于小波包分析方法, 按估算的小波包分解层次对应的信号频率范围、低通滤波器的截止频率和小波包系数频率由小到大节点的排列顺序, 优化设计小波包树。研究分析了不同小波的主要特性, 选用正交或双正交小波, 采用本文提出的阈值处理方案和设计的低通滤波器, 对 GT-1A 航空重力勘查系统的测量数据进行了滤波试验研究。结果表明, 上述滤波方法和阈值处理方案是可行的, 在选用的小波中, 离散 Meyer 小波滤波器滤波效果最佳, 获得与 GT-1A 系统滤波结果几乎同样满意的滤波效果, 二者滤波结果的均方差值在 0.2~0.3 mGal 之间。

**关键词:** 航空重力测量; 小波包分析; 低通滤波器; 小波特性; 阈值处理

**中图分类号:** P631      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-8918(2020)02-0300-13



## 0 引言

在飞行状态下进行的航空重力测量, 必然受到飞机发动机的震动、气流的颠簸和气流引起的飞机高度变化等因素产生扰动加速度的影响<sup>[1-9]</sup>。扰动加速度的量级很大(可达  $10^6$  mGal), 并以高频成分为主, 而重力异常信号幅值较小(约  $10^2$  mGal 左右), 完全被高频噪声干扰所淹没, 通过低通滤波压制高频噪声, 从而获得相对低频部分有意义的重力异常信号<sup>[1-9]</sup>。然而, 噪声干扰可能涵盖整个频带, 低频信息既包含重力异常信号, 也包含噪声信号。因此, 如何既保留低频有效信息, 又有效去除低频噪声, 成为高精度航空重力测量需要解决的技术难题。

小波分析是应用数学和工程学科中一个迅速发展新领域, 经过近 30 年的探索研究, 重要的数学形式化体系已经建立, 理论基础更加扎实<sup>[10-11]</sup>。小波变换具有良好的时频局部化特性, 在信号处理中可用于弱信号的提取分离, 而对信号进行多尺度分

解, 则可以抑制噪声(滤波)。国内众多学者开展了小波滤波技术研究, 并在不同领域得到广泛应用。在大地测量中, 柳林涛等构造三类连续小波, 用于航空重力测量数据滤波处理<sup>[12]</sup>, 孙中苗等初步探讨了小波阈值滤波法在航空重力测量数据处理中的适用性<sup>[13]</sup>; 在重力勘探领域, 罗锋等选择 Daubechies N 小波系和小波阈值滤波法, 对引进的俄制 GT-1A 航空重力勘查系统获取的测量数据进行滤波试验研究<sup>[11]</sup>; 在基于飞艇的地空电磁探测中, 李肃义等采用 sym8 小波, 对地空电磁测量数据进行了综合滤波方法技术研究<sup>[14]</sup>; 在变形监测领域, 章浙涛等采用小波包分析和基于频率顺序的信息分段的多阈值准则, 对变形监测数据进行了滤波处理研究<sup>[15]</sup>。尽管上述研究取得了一定的进展, 但对于航空重力测量数据处理来说, 与传统滤波技术一样, 还需研究、设计相应的小波低通滤波器, 根据需要方便使用。此外, 在小波选取、小波系数阈值处理方案等方面, 也还需进行深入、系统的研究。研究分析不同类型小波的不同特性, 从理论和应用两方面综合考虑, 选取

**收稿日期:** 2019-08-12; **修回日期:** 2019-12-08

**基金项目:** 国家重点研发计划项目“航空重力测量技术装备研制”之课题“航空重力数据处理软件实用化研制”(2017YFC0601705); 国家“863”计划主题项目课题(2013AA063905)

**作者简介:** 王静波(1963-), 男, 博士, 副教授, 主要从事航空重力方法技术研究工作。Email: wjb@ncut.edu.cn

**通讯作者:** 熊盛青(1963-), 男, 博士, 教授级高级工程师, 博士生导师, 主要从事航空物探和遥感技术研究和管理工作。Email: xsq@agr.cn

合适的小波用于航空重力数据处理;在通用阈值处理方案的基础上,应根据航空重力异常信号的频率特性和噪声分布特点,研究适合于航空重力测量数据处理的小波系数阈值处理方案<sup>[16]</sup>。

小波包分析不仅像小波分析一样对信号的低频部分进行分解,也对信号的高频部分进行分解<sup>[15,17-23]</sup>。相对而言,小波包分析对信号在频率域可提供更复杂和精细的分解,且通过对各分解层信号的优化组合,可获得接近滤波器滤波频率范围的信号。考虑到航空重力测量信号频率的分布特征,本文拟采用小波包阈值滤波法研究、设计所需的小波低通滤波器,并利用它对引进俄制 GT-1A 航空重力勘查系统获得的测量数据进行滤波试验研究。

### 1 小波包阈值滤波

小波包分析是小波分析的一种推广,它为信号分析处理提供了更精细的信号分解途径。作为小波包分析在信号分析中的应用之一,小波包阈值滤波过程包含 4 个基本步骤<sup>[17,22]</sup>:① 选取一种小波,确定小波包分解层级  $N$ ,对信号进行小波包分解;② 优化设计小波包分解树;③ 对小波包分解系数进行阈值处理;④ 基于小波包分解原系数和修改的系数,进行小波包重构计算,恢复信号。

#### 1.1 信号的小波包分解与重构

假设离散信号序列为  $s(k) (k=1,2,3,\dots,N)$ ,则可对信号  $S=\{s(k)\}$  进行离散小波分解,其二进 3 层小波分解树如图 1 所示,小波分解单元如图 2 所示, $j$  为小波分解层次, $A_j, D_j$  为第  $j$  层的小波分解系数,它们分别代表分解信号的低频分量和高频分量,亦称之为低频系数和高频系数<sup>[17]</sup>。

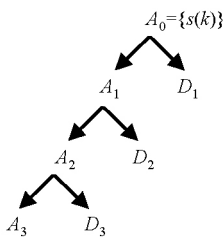


图 1 小波包分解树(3 层)

Fig.1 Wavelet decomposition tree at level 3



图 2 小波分解单元

Fig.2 Unit of wavelet decomposition

小波包分析不仅对信号的低频分量进行分解,也对高频分量进行分解,信号  $S = \{s(k)\}$  的 3 层小波包分解树如图 3 所示,小波包分解单元如图 4 所示, $j$  为小波包分解层次, $n$  为第  $j$  层的小波包节点序号( $n$  可能值:  $0,1,\dots,2^j-1$ ), $d_{j,n}$  为小波包节点( $j, n$ ) 对应的小波包分解系数<sup>[17]</sup>。

选用正交或双正交小波,则小波包系数分解与重构算法如下:

分解问题是:已知系数  $d_{j,n}$ ,求系数  $d_{j+1,2n}$  和  $d_{j+1,2n+1}$ 。分解公式为<sup>[15,20-22]</sup>

$$\begin{cases} d_{j+1,2n}(k) = \sum_{l \in Z} h(l - 2k) d_{j,n}(l) \\ d_{j+1,2n+1}(k) = \sum_{l \in Z} g(l - 2k) d_{j,n}(l) \end{cases} \quad (1)$$

重构问题是:已知系数  $d_{j+1,2n}$  和  $d_{j+1,2n+1}$ ,求系数  $d_{j,n}$ 。重构公式为<sup>[15,20-22]</sup>

$$d_{j,n}(k) = \sum_{l \in Z} \bar{h}(k - 2l) d_{j+1,2n}(l) + \sum_{l \in Z} \bar{g}(k - 2l) d_{j+1,2n+1}(l), \quad (2)$$

其中: $h, g$  分别为低通和高通分解滤波器系数, $\bar{h}, \bar{g}$  分别为低通和高通重构滤波器系数。

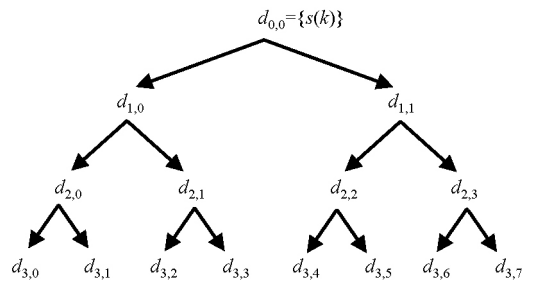


图 3 小波包分解树(3 层)

Fig.3 Wavelet packet decomposition tree at level 3

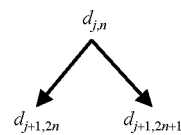


图 4 小波包分解单元

Fig.4 Unit of wavelet packet decomposition

#### 1.2 小波包分解系数的频率顺序

对于信号分析来讲,重要的是将小波包系数按频率顺序排列,而不是按小波包节点的自然顺序排列。由于小波包分解时,每对高频系数进行一次分解,相应分解系数的频率排位顺序就会“翻转”一次,从而造成频率顺序与节点自然顺序不一致现象<sup>[15,21]</sup>。按此规律,可推算出小波包分解系数频率顺序与对应小波包节点号的对应关系。以 3 层小波

包分解为例,按前所述规律,可推算出小波包分解系数频率由小到大排位与节点序号的对应关系,具体分析结果见表 1。由表 1 进一步分析可推算小波包分解系数频率由小到大对应节点号的顺序,如第 3 分解层的小波包分解系数频率由小到大对应节点号的顺序为(3,0),(3,1),(3,3),(3,2),(3,6),(3,7),(3,5),(3,4)<sup>[15,21]</sup>。

表 1 小波包系数频率排位与节点序号(3 层)

Table 1 The "frequency" order of wavelet packet coefficients and natural nodes order at level 3

$j$ (层次)	分类名	序号( $n$ )							
0	节点、频率排位( $n$ )	0							
1	自然节点顺序( $n$ )	0			1				
	频率排位( $n$ )	0			1				
2	自然节点顺序( $n$ )	0	1	2	3				
	频率排位( $n$ )	0	1	3	2				
3	自然节点顺序( $n$ )	0	1	2	3	4	5	6	7
	频率排位( $n$ )	0	1	3	2	7	6	4	5

### 1.3 小波包系数的阈值处理

小波包系数阈值处理的关键是阈值估计和阈值施加方案。小波包分析中有 4 种常用的阈值估计方法和 3 种简单的阈值施加方案,具体如下:

4 种阈值估计方法<sup>[11,13-15,17,21]</sup>:① 自适应阈值(Rigrsure);② 固定形式阈值("sqtwolog");③ 启发式阈值(Heursure);④ 极小化极大阈值(Minimax)。

3 种阈值施加方案<sup>[19]</sup>:① 硬阈值处理(Hard Thresholding);② 软阈值处理(Soft Thresholding);③ 比例阈值处理(Percentage Thresholding)。

除上述方法和方案外,还有多种阈值估计方法和阈值施加方案。具体采用何种阈值估计方法和阈值施加方案取决于实际的应用,后续将结合航空重力测量数据处理做进一步探讨研究。

## 2 小波低通滤波器设计

基于小波包分析方法,按估算的小波包分解层次对应的信号频率范围、低通滤波器的截止频率和小波包系数频率节点的排列顺序,优化小波包树,设计小波低通滤波器。小波低通滤波器的设计需重点关注 3 个方面:小波的选取、小波包树的优化设计和小波包系数的阈值量化处理。

### 2.1 小波的选取

正交或双正交小波包分解可将信号按频率分解到无重叠的子带上,易于小波包快速算法的实现。因此,在小波包分析中,小波滤波器通常是选用正交或双正交小波来实现的。常用的正交、双正交小波

有 Discrete Meyer 小波(dmey)、Daubenchies 小波系(dbN)、Symlets 小波系(symN)、Coiflet 小波系(coifN)和 Biorthogonal 小波系(biorNr.Nd)等<sup>[17]</sup>。

不同类型的小波系有不同的特性,其主要特性见表 2<sup>[17]</sup>。具有紧支撑集的小波(时域或空域),局部化能力强,易于算法实现;对称性使小波滤波器具有线性相位,避免了信号失真;消失矩的大小决定了用小波逼近光滑函数的收敛率;正则性是光滑性相关联的,正则性越好,重构信号就越光滑,而光滑性决定了滤波频率分辨率的高低<sup>[10,17,24]</sup>。

Daubechies 原理表明除 Haar 小波以外不存在对称的紧支撑正交小波<sup>[18]</sup>,且紧支撑性与光滑性二者不可兼得<sup>[10]</sup>。构造一个有正交性、紧支撑集、平滑性和对称性的小波是困难的<sup>[10]</sup>,应根据应用实际需求,在各项特性指标间做出取舍,选择适合的小波。

表 2 常用正交或双正交小波系的主要特性

Table 2 Wavelet families and main associated properties

小波系	dmey	dbN	symN	coifN	biorNr.Nd
紧支撑性		●	●	●	●
正交性	●	●	●	●	
双正交性					●
对称性	●				●
准对称性			●	●	
消失矩		●	●	●	●
正则性		●	●	●	●
正交分析	●	●	●	●	
双正交分析	●	●	●	●	●
精确重构	●	●	●	●	●

### 2.2 小波包树的优化设计

信号的多尺度小波包分解相当于带通滤波(分频),对于第  $j$  小波包分解层,每个节点分解系数的频带宽度为  $2^{-j}$  Hz(采样频率 1 Hz)<sup>[17,20,24]</sup>。根据滤波器的截止频率和估算的分解层次对应的信号频率范围,选取分解层次  $N$ ,并优化设计小波树。如周期为 60 s 的低通滤波器,相对应截止频率  $f_c$  近似为 0.016 7 Hz(注  $f_c \approx 2^{-6} + 2^{-10} + 2^{-14} \approx 0.016 7$  Hz),取分解层次  $N = 14$ ,按小波包系数频率由小到大对应的小波包节点号顺序,优化设计小波包分解树,如图 5 所示。

### 2.3 小波包系数阈值量化处理方案

采用正交或双正交小波滤波器对数据进行滤波处理,可将数据按频率划分为若干子带。按小波包系数频率大小,分别采用不同的阈值准则和处理方案,对小波包系数进行量化处理。现以 60 s 低通滤波器为例,加以具体说明。

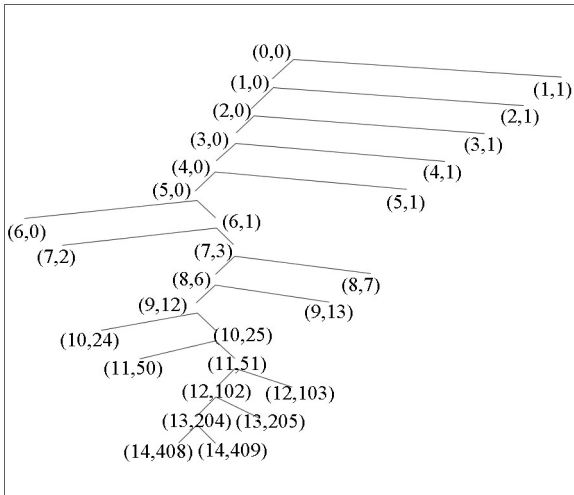


图5 小波低通滤波器的小波包分解树(滤波周期:60 s)

Fig.5 Wavelet packet decomposition tree of the low pass filter (filtering period: 60 s)

按 1.2 小节所述方法分析可知:小波包低频系数频率由小到大对应的小波包节点号顺序为(6, 0), (10, 24), (14, 408), 高频系数频率由小到大对应的小波包节点号顺序为(14, 409), (13, 205), (12, 103), (11, 50), (9, 13), (8, 7), (7, 2), (5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (1, 1)。按照小波包系数频率大小,分别采用不同的阈值方案进行处理。以异常信号为主的低频段,阈值要小;而以噪声为主的高频段,阈值要大。具体方案如下:

方案 1:保留全部低频系数,高频系数全部都置“零”;

方案 2:节点(6,0)低频系数进行平滑处理,节点(10,24)和(14,408)低频系数按估算比例压缩或

采用通用阈值估计进行量化处理,各层高频系数全部都置“零”;

方案 3:在方案 2 基础上,节点(14,409)高频系数(过度频带)采用通用阈值估计进行量化处理,其余各节点高频系数全部都置“零”;

方案 4:在方案 3 基础上,节点(13,205), (12, 103), (11,50), (9,13)高频系数采用通用阈值估计进行量化处理,其余各节点高频系数全部都置“零”。

对于航空重力异常测量信号来讲,由于小波包分解低频系数同时包含信号和噪声两部分,且不同节点小波包系数的信噪比也不相同,故通用阈值处理方案有其局限性。在通用阈值处理方案基础上,本文提出的小波包系数阈值处理方案,针对不同节点的小波包低频系数采用平滑或按估算比例压缩的方法压制高频(相对)噪声,故能显著提高滤波精度。

### 3 滤波试验

图 6 为 GT-1A 系统 3010 测线原始未滤波航空自由空间重力异常测量数据,异常信号被幅度大致在 $\pm 5000$  mGal 的噪声信号所淹没,横轴 Fid 为测线基准点号,间距平均为 30 m<sup>[2,7-9]</sup>。选用正交或双正交小波,采用本文提出的阈值处理方案和设计的的小波低通滤波器,对图 6 原始未滤波数据进行了低通滤波试验研究,并与 GT-1A 系统软件滤波结果进行对比分析。

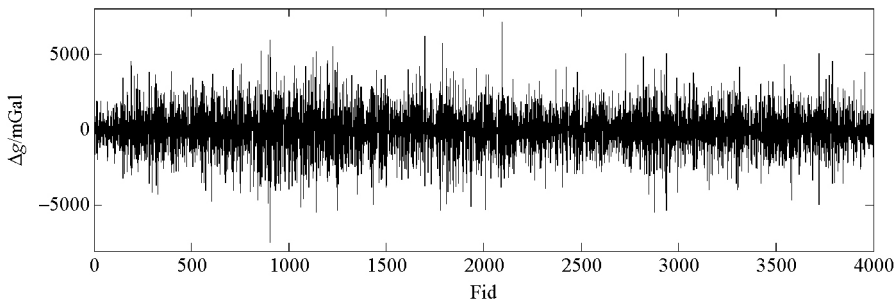


图6 GT-1A 系统原始未滤波航空自由空间重力异常

Fig.6 GT-1A raw unfiltered airborne gravity free air anomaly

#### 3.1 小波包树的优化设计

在航空重力测量中,低通滤波器的截止频率 $f_c$ 一般在 0.005~0.016 6 Hz 之间,也就是滤波周期为 200~60 s<sup>[5]</sup>。试验中,小波低通滤波器的滤波周期选取具有代表性的 60 s 和 100 s(对应的截止频率 $f_c$ 分别为 0.016 7 Hz 和 0.01 Hz),优化设计的小波包树分别如图 5 和图 7 所示。

分别为 0.016 7 Hz 和 0.01 Hz),优化设计的小波包树分别如图 5 和图 7 所示。

100 s 与 60 s 小波低通滤波器的设计方法相同,其小波包低频系数频率由小到大对应的小波包节点号顺序为(7,0), (9,6), (12,60), 高频系数频率由

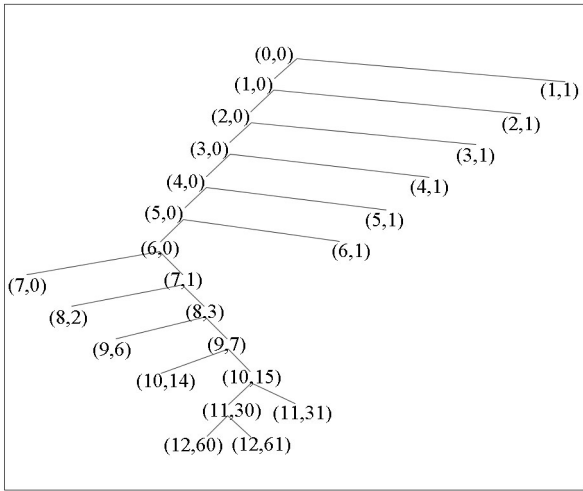


图 7 小波低通滤波器的小波包分解树(滤波周期:100 s)

Fig.7 Wavelet packet decomposition tree of the low pass filter (filtering period: 100 s)

从小到大对应的小波包节点号顺序为(12, 61), (11, 31), (10, 14), (8, 2), (6, 1), (5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (1, 1)。

### 3.2 小波的选择

不同类型的小波,具有不同的特性(表 2),滤波器小波的选择应从正交性、对称性、消失矩和正则性等多方面综合考虑。对于 dbN、symN、coifN 和 biorNr.Nd 小波系,随着小波阶数 N 的增大,小波具有更高的正则性<sup>[24]</sup>,相应也具有更高的频率分辨率。但处于不同频段的重力异常测量信号的信噪比不同,故滤波周期不同的滤波器对小波频率分辨率的需求也不尽相同。试验中,60 s 滤波器选取 dmey、db7、sym7、coif5、bior5.5 和 bior6.8 小波,而 100 s

滤波器选取 dmey、db11、sym10、coif5、bior5.5 和 bior6.8 小波,对 GT-1A 系统获取的航空重力数据进行滤波试验研究。对于 60 s 和 100 s 滤波器小波的选择,dbN、symN 小波系存在差异,而其他小波系则相同(在小波系现有小波中,所选用小波的频率分辨率已最高)。

首先,采用 GT-1A 系统数据处理软件对图 6 的原始未滤波数据进行 60 s 和 100 s 低通滤波处理,并将滤波结果作为近似标准;其次,采用本文设计的 60 s 和 100 s 小波包分解树,对 GT-1A 系统滤波结果分别进行小波包分解计算;最后,分别将分解的部分小波包系数(表 3 或表 4:本行以下各行小波包节点系数)置“零”,再用剩余部分小波包系数(表 3 或表 4:本行及以上各行小波包节点系数)进行重构计算,重构计算结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计见表 3 和表 4,表中数据为均方差值,单位为 mGal。

### 3.3 小波滤波试验

选用不同的正交或双正交小波(同前),采用本文研究、设计的 60 s 和 100 s 小波低通滤波器和本文提出的阈值量化处理方案,对图 6 所示的原始未滤波数据进行了低通滤波试验研究。

滤波结果如图 8~19 所示,表 5 和表 6 分别为 60 s 和 100 s 滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计,表中数据为均方差值,单位为 mGal。

### 3.4 结果分析

由表 3、表 4 分析可知:① 试验中,所选取的正交或双正交小波(见表 3 和表 4),按优化设计的小

表 3 小波包重构计算结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计(60 s 低通滤波器)

Table 3 Difference statistics between the wavelet packet reconstruction's computing result and GT-1A filtering result (60 s low-pass filter)

小波包节点	dmey 小波	db7 小波	sym7 小波	coif5 小波	bior5.5 小波	bior6.8 小波
(6,0)	0.3319	0.3847	0.3598	0.3638	0.3847	0.3802
(10,24)	0.2880	0.2296	0.2192	0.2409	0.2907	0.2349
(14,408)	0.2410	0.2274	0.2174	0.2318	0.2691	0.2591
(14,409)	0.2096	0.2310	0.2138	0.2329	0.2586	0.2569
(13,205)	0.2816	0.2348	0.2117	0.2299	0.2795	0.2377
(12,103)	0.2803	0.2366	0.2313	0.2114	0.2366	0.2519
(11,50)	0.2195	0.2165	0.2087	0.1935	0.2219	0.2131
(9,13)	0.7488	0.1221	0.1372	0.1124	0.1204	0.1092
(8,7)	0.0890	0.0538	0.0517	0.0482	0.0706	0.0523
(7,2)	0.0086	0.0316	0.0312	0.0191	0.0347	0.0289
(5,1)	3.8912×10 <sup>-4</sup>	8.8581×10 <sup>-4</sup>	8.7309×10 <sup>-4</sup>	4.3837×10 <sup>-4</sup>	0.0013	9.545×10 <sup>-4</sup>
(4,1)	3.2967×10 <sup>-4</sup>	2.7093×10 <sup>-4</sup>	2.7056×10 <sup>-4</sup>	2.7003×10 <sup>-4</sup>	2.7207×10 <sup>-4</sup>	2.7096×10 <sup>-4</sup>
(3,1)	3.1459×10 <sup>-4</sup>	2.5036×10 <sup>-4</sup>	2.4919×10 <sup>-4</sup>	2.5064×10 <sup>-4</sup>	2.5232×10 <sup>-4</sup>	2.4984×10 <sup>-4</sup>
(2,1)	2.7890×10 <sup>-4</sup>	2.0282×10 <sup>-4</sup>	2.0162×10 <sup>-4</sup>	2.0449×10 <sup>-4</sup>	2.0277×10 <sup>-4</sup>	2.0499×10 <sup>-4</sup>
(1,1)	1.8993×10 <sup>-4</sup>	9.1145×10 <sup>-11</sup>	4.2125×10 <sup>-11</sup>	1.6598×10 <sup>-7</sup>	7.4349×10 <sup>-11</sup>	1.2700×10 <sup>-11</sup>

表 4 小波包重构计算结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计(100 s 低通滤波器)  
 Table 4 Difference statistics between the wavelet packet reconstruction's computing result and GT-1A filtering result (100 s low-pass filter)

小波包节点	dmey 小波	db11 小波	sym10 小波	coif5 小波	bior5.5 小波	bior6.8 小波
(7,0)	0.6736	0.4610	0.5556	0.6279	0.5986	0.5803
(9,6)	0.1087	0.2421	0.2696	0.1314	0.2007	0.1795
(12,60)	0.0710	0.0913	0.1107	0.0596	0.1864	0.1679
(12,61)	0.1058	0.0569	0.0712	0.1003	0.1460	0.1106
(11,31)	0.1144	0.0657	0.1039	0.0951	0.1458	0.0866
(10,14)	0.1321	0.0305	0.0645	0.0336	0.1112	0.0527
(8,2)	0.0137	0.0165	0.0180	0.0166	0.0435	0.0332
(6,1)	$3.6252 \times 10^{-4}$	$4.5743 \times 10^{-4}$	$4.8414 \times 10^{-4}$	$4.5477 \times 10^{-4}$	0.0014	$9.7659 \times 10^{-4}$
(5,1)	$3.1777 \times 10^{-4}$	$2.7884 \times 10^{-4}$	$2.7928 \times 10^{-4}$	$2.7893 \times 10^{-4}$	$2.8253 \times 10^{-4}$	$2.8021 \times 10^{-4}$
(4,1)	$3.0947 \times 10^{-4}$	$2.7023 \times 10^{-4}$	$2.7035 \times 10^{-4}$	$2.6972 \times 10^{-4}$	$2.6975 \times 10^{-4}$	$2.7044 \times 10^{-4}$
(3,1)	$2.9291 \times 10^{-4}$	$2.4962 \times 10^{-4}$	$2.5092 \times 10^{-4}$	$1.4942 \times 10^{-7}$	$2.5072 \times 10^{-4}$	$2.5129 \times 10^{-4}$
(2,1)	$2.5544 \times 10^{-4}$	$2.0668 \times 10^{-4}$	$2.0458 \times 10^{-4}$	$2.0489 \times 10^{-4}$	$2.0926 \times 10^{-4}$	$2.0485 \times 10^{-4}$
(1,1)	$1.5082 \times 10^{-4}$	$1.8804 \times 10^{-12}$	$2.1780 \times 10^{-13}$	$1.4942 \times 10^{-7}$	$5.4468 \times 10^{-11}$	$5.4468 \times 10^{-11}$

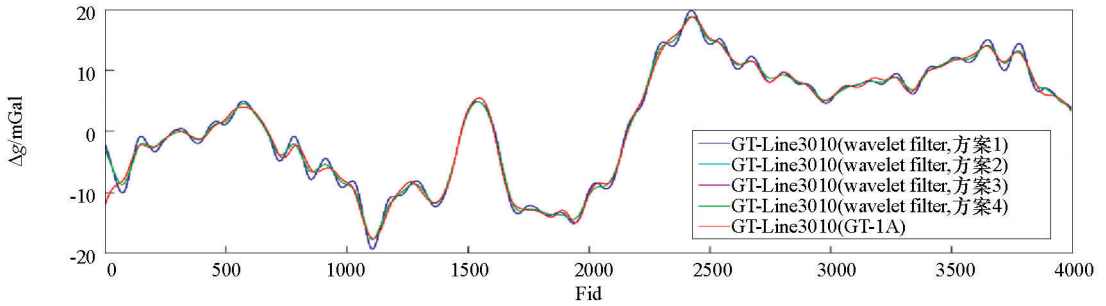


图 8 dmey 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 Fig.8 Airborne gravity free air anomaly of dmey wavelet and GT-1A 60 s filter

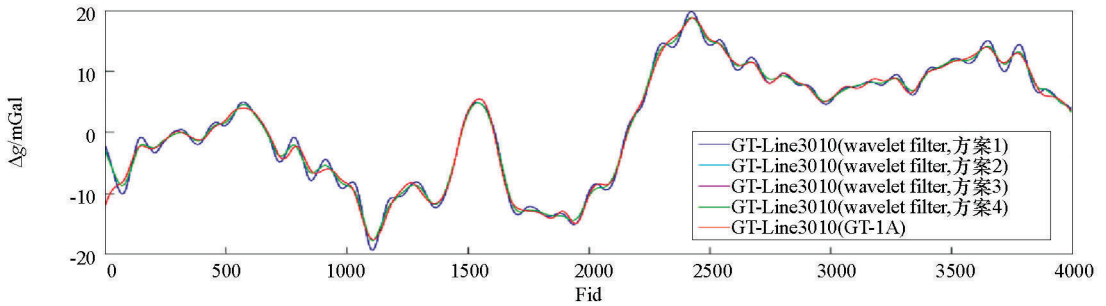


图 9 db7 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 Fig.9 Airborne gravity free air anomaly of db7 wavelet and GT-1A 60 s filter

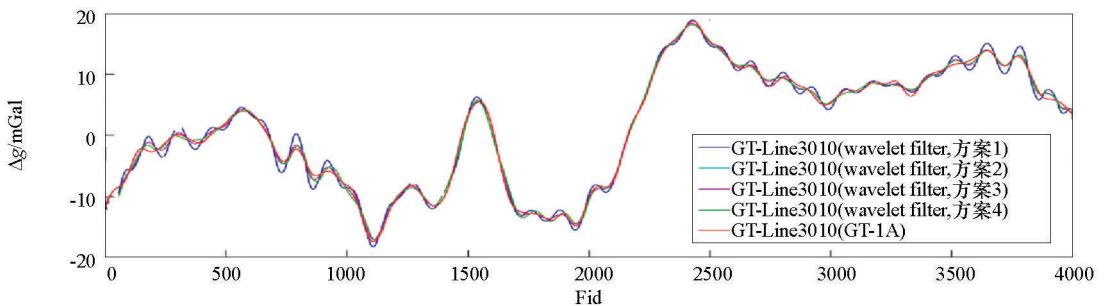


图 10 sym7 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 Fig.10 Airborne gravity free air anomaly of sym7 wavelet and GT-1A 60 s filter

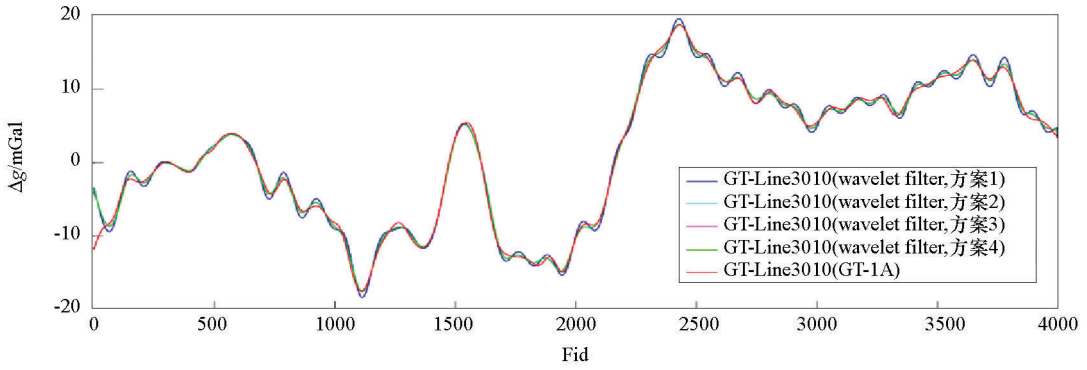


图 11 coif5 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 Fig.11 Airborne gravity free air anomaly of coif5 wavelet and GT-1A 60 s filter

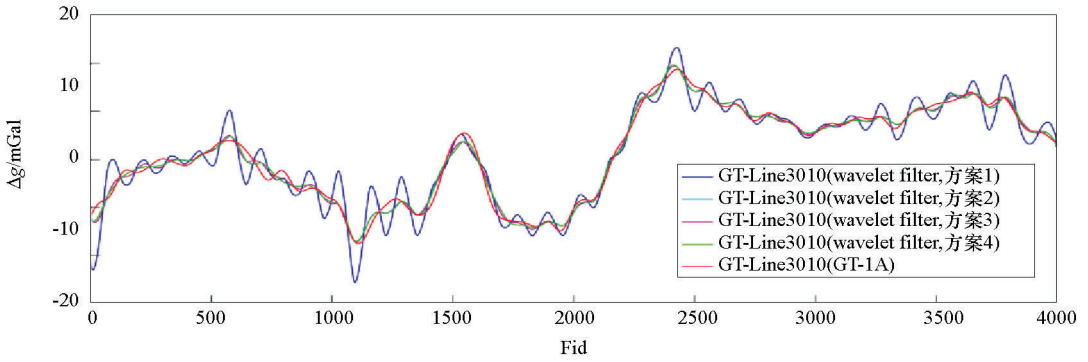


图 12 bior5.5 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 Fig.12 Airborne gravity free air anomaly of bior5.5 wavelet and GT-1A 60 s filter

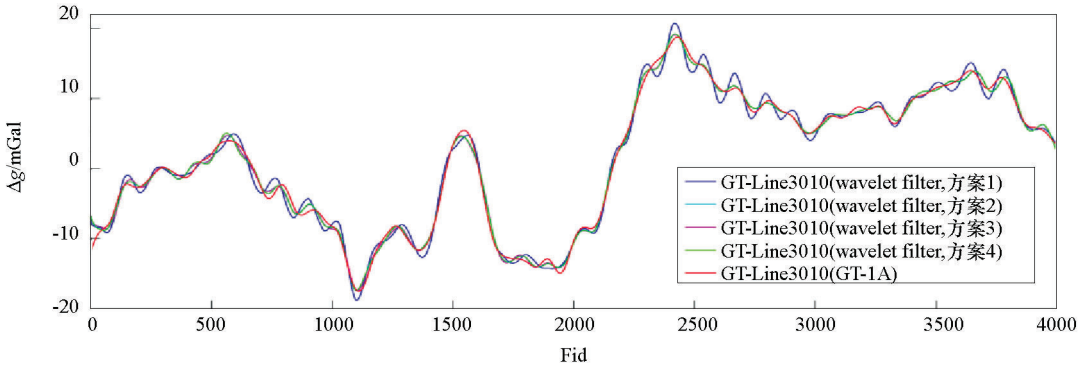


图 13 bior6.8 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 Fig.13 Airborne gravity free air anomaly of bior6.8 wavelet and GT-1A 60 s filter

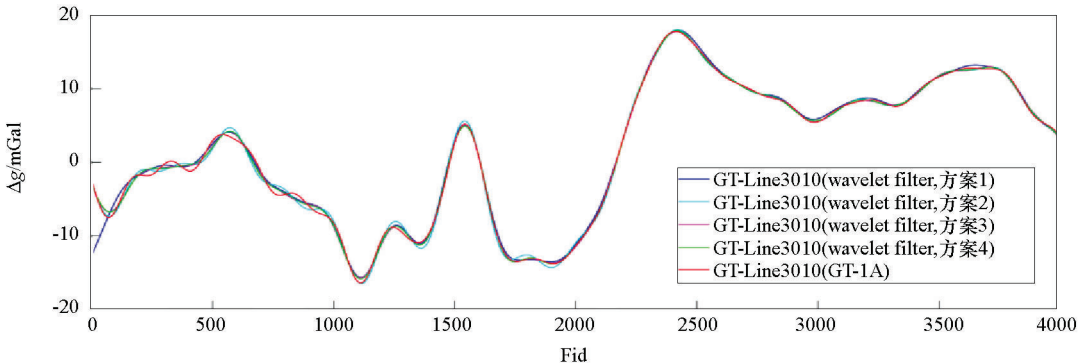


图 14 dmey 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
 万方数据 Fig.14 Airborne gravity free air anomaly of dmey wavelet and GT-1A 100 s filter

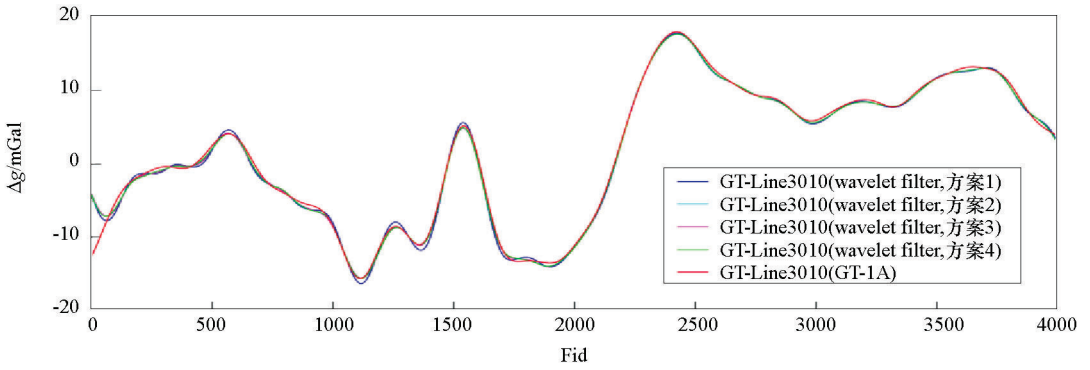


图 15 db11 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig.15 Airborne gravity free air anomaly of db11 wavelet and GT-1A 100 s filter

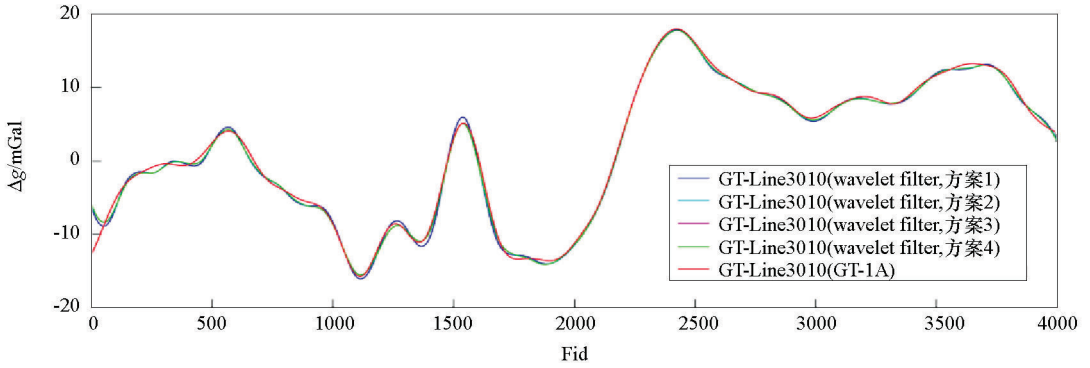


图 16 sym10 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig.16 Airborne gravity free air anomaly of sym10 wavelet and GT-1A 100 s filter

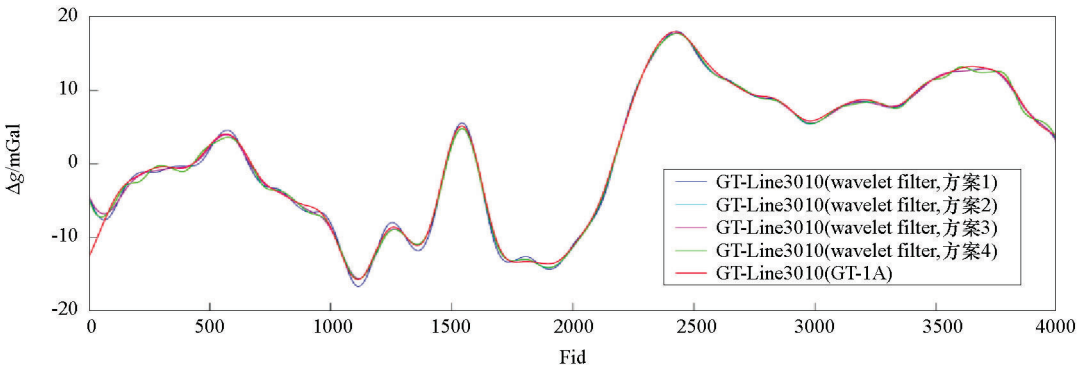


图 17 coif5 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig.17 Airborne gravity free air anomaly of coif5 wavelet and GT-1A 100 s filter

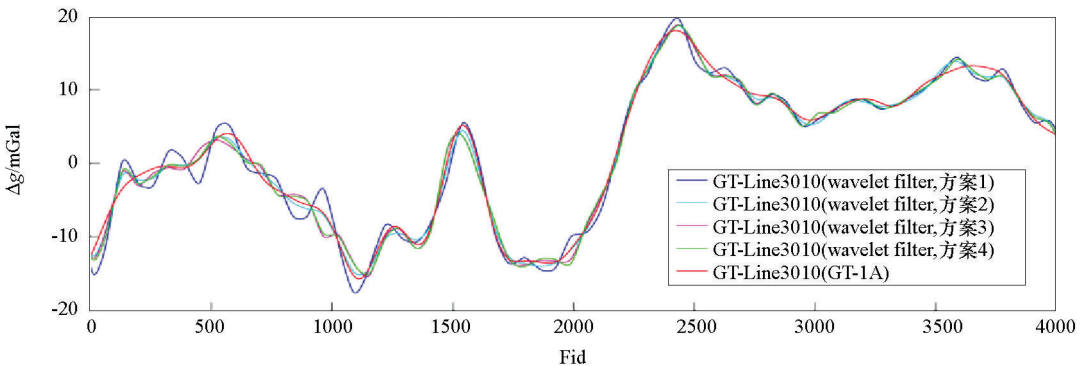


图 18 bior5.5 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig.18 Airborne gravity free air anomaly of bior5.5 wavelet and GT-1A 100 s filter



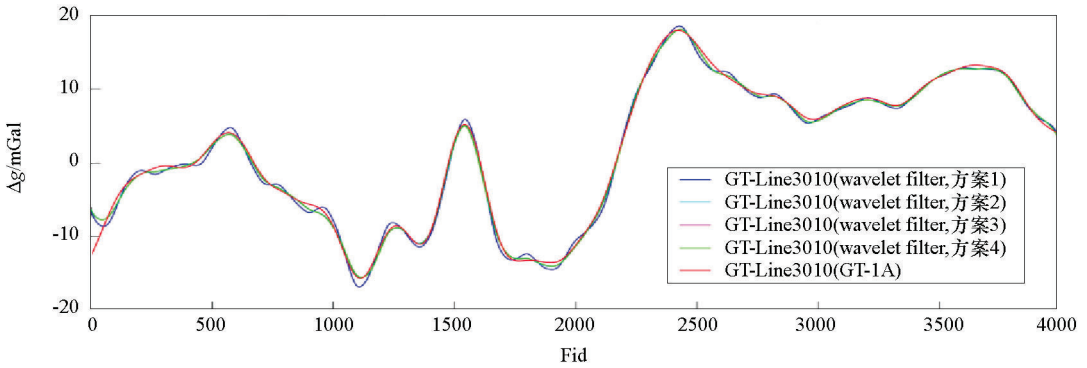


图 19 bior6.8 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig.19 Airborne gravity free air anomaly of bior6.8 wavelet and GT-1A 100 s filter

表 5 小波滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计(滤波周期:60 s)

Table 5 Difference statistics between the wavelet filtering result and GT-1A filtering result (filtering period: 60 s)

小波	dmey	db7	sym7	coif5	bior5.5	bior6.8
方案 1	0.4880	0.7049	0.6914	0.5549	2.5541	0.9831
方案 2	0.2989	0.3970	0.3972	0.3222	0.9135	0.4799
方案 3	0.2797	0.3971	0.3972	0.3204	0.9135	0.4776
方案 4	0.3255	0.3971	0.4847	0.3204	0.9722	0.4928

表 6 小波滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计(滤波周期:100 s)

Table 6 Difference statistics between the wavelet filtering result and GT-1A filtering result (filtering period: 100 s)

小波	dmey	db11	sym10	coif5	bior5.5	bior6.8
方案 1	0.4168	0.3734	0.3999	0.4236	1.0332	0.5504
方案 2	0.2176	0.2714	0.3125	0.2739	0.5091	0.3161
方案 3	0.2262	0.2714	0.3125	0.2748	0.8593	0.3177
方案 4	0.3362	0.2745	0.3125	0.2980	0.8860	0.3177

波包树分解后,能够精确完整重构;② 所选用小波,因频率分辨率和相位失真等因素的影响,引起重构计算结果误差;理想情况下,随着频率由低到高重构包含小波包系数的增加,重构计算结果误差会变小,小波滤波重构精度会提高。而滤波试验结果,随着频率由低到高重构包含小波包系数增加,重构计算结果误差出现局部波动,总体趋势和理想情况分析吻合。③由①和②进一步分析可知:本文小波包分解树的优化设计方案是可行的。

对 GT-1A 系统原始未滤波数据(图 6)、及其经 GT-1A 系统软件 60 s 和 100 s 滤波获得的数据分别进行功率谱分析,结果如图 20 所示(黑色、蓝色和红色曲线分别为原始未滤波、及其 GT-1A 系统 60 s 和 100 s 滤波航空自由空间重力异常功率谱)。由图 20 分析可知:重力异常信号主要集中在小于 0.02 Hz 低频段,在 0~0.01 Hz 频段的信噪比大于处于 0.01~0.02 Hz 频段的信噪比。

由表 3 或表 4 可以看出处于不同频带的小波包

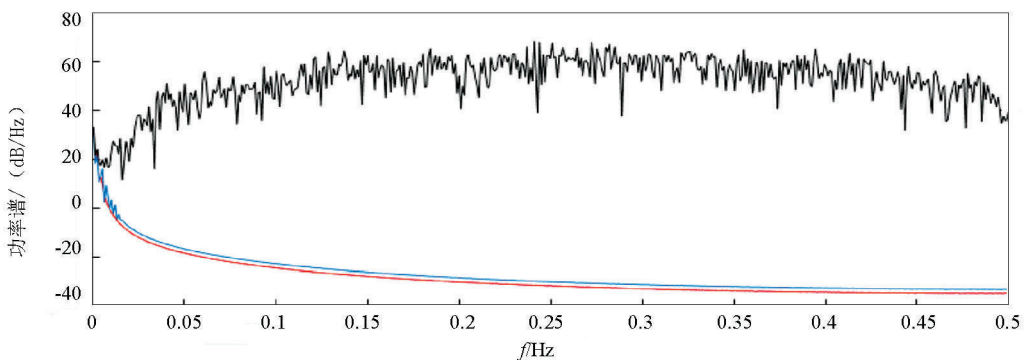


图 20 GT-1A 系统原始未滤波、60 s 和 100 s 滤波航空自由空间重力异常功率谱

Fig.20 Power spectrums of GT-1A raw unfiltered, 60 s and 100 s filtered airborne gravity free air anomaly

节点系数对滤波结果的影响,以 60 s 滤波器为例,对本文采用的阈值量化处理方案做进一步说明。方案 1:保留低频系数,高频系数置“零”;方案 2:在方案 1 基础上,对低频系数细化处理;节点(6,0)低频系数,以异常信号为主,对其进行平滑处理,抑制高频(相对)噪声干扰。节点(10,24)和(14,408)低频系数,噪声幅值远大于异常信号幅值,按估算比例压缩小波包系数幅值,降低高频(相对)噪声的影响,亦可采用通用阈值估计进行量化处理。方案 3:在方案 2 基础上,对节点(14,409)高频(过度频带)系数,采用通用阈值估计进行量化处理;因小波包分解存在频率分辨率的问题,有可能造成频率失真,通过方案 3 弥补方案 2 的不足。因节点(14,409)小波包系数对应的频带宽度较“窄”,方案 3 对滤波效果的改善作用影响不大。方案 4:在方案 3 基础上,对节点(13,205),(12,103),(11,50),(9,13)部分高频系数,采用通用阈值估计进行量化处理。对于高频系数,因信噪比极低,故阈值量化处理效果有限。综合以上分析可知:① 四种方案中,方案 2 或方案 3 滤波效果最佳;② 因在低频段,不同频带信噪比存在差异,频率越低,信噪比越大,故 100 s 滤波器的滤波效果好于 60 s 滤波器的滤波效果。

滤波试验结果图 8~19、表 5 和表 6 也可进一步验证上述分析结果。通过对比分析可知:① 采用方案 2~4 的滤波效果好于采用方案 1 的滤波效果;② 采用方案 2~4 的滤波效果基本相同,其中滤波效果最佳的为方案 2 或方案 3;③ 总体而言,100 s 滤波器的滤波效果好于 60 s 滤波器的滤波效果。

将滤波试验结果(最佳效果)按选用的小波归纳重新整理,不同小波 60 s、100 s 滤波结果分别如图 21、图 22 所示,滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果差值统计见表 7。由图 21、图 22 和表 7 分析可知:① 60 s 小波滤波器:按滤波试验效果,选用小波的排列顺序依次为 bior5.5、bior6.8、sym7、db7、coif5 和 dmey 小波,dmey 小波滤波效果最佳(均方差值约为 0.28 mGal);② 100 s 小波滤波器:按滤波试验效果,选用小波的排列顺序依次为 bior5.5、bior6.8、sym10、coif5、db11 和 dmey 小波,dmey 小波滤波效果最佳(均方差值约为 0.22 mGal)。

滤波试验效果与选用小波的频率分辨率和对称性有关,根据所选小波频率分辨率高低,再考虑小波的对称性,综合判断小波滤波试验效果。在滤波试验选用的小波中,db7 和 db11 小波无对称性,sym7、sym10 和 coif5 小波均具有准对称性,而 dmey、bior5.5

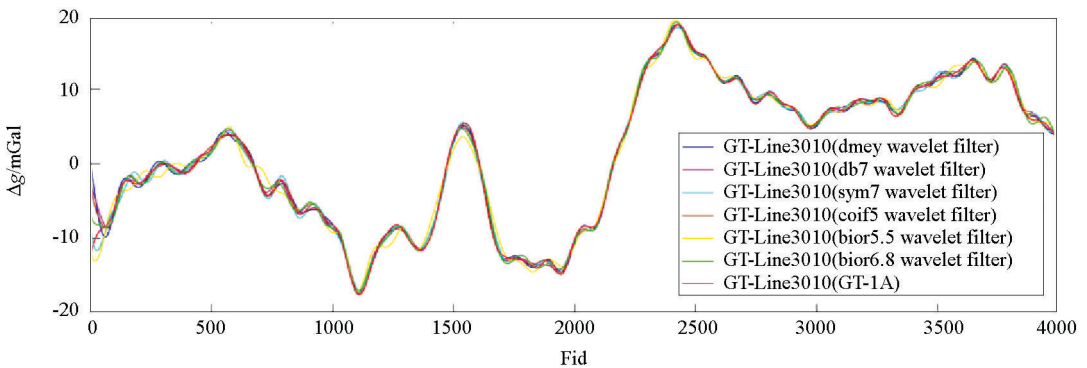


图 21 小波滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
Fig.21 Airborne gravity free air anomaly of wavelets and GT-1A 60 s filter

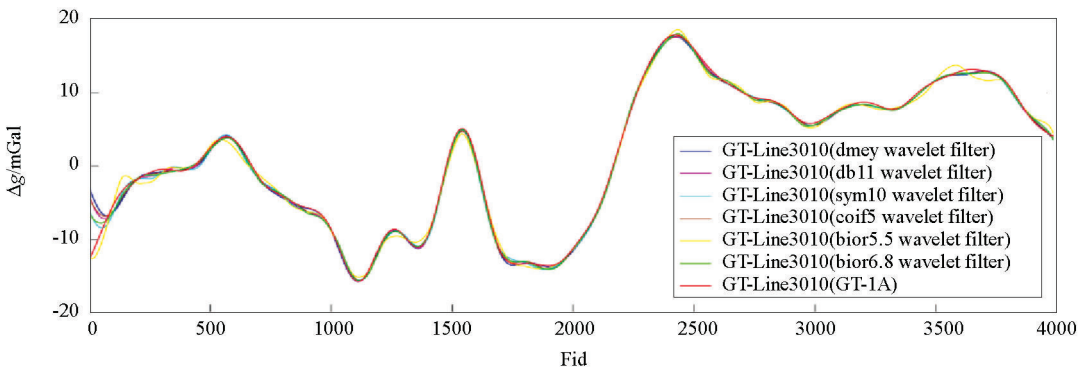


图 22 小波滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比  
Fig.22 Airborne gravity free air anomaly of wavelets and GT-1A 100 s filter

表7 小波滤波试验结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计

Table 7 The difference between wavelet filtering and GT-1A filtering result and statistics

滤波周期 /s	小波	最大差值 /mGal	最小差值 /mGal	平均差值 /mGal	均方差值 /mGal	比较点数 (N)
60	dmey	0.6875	-0.6580	0.0035	0.2797	3000
	db7	0.8516	-0.8573	0.0030	0.3970	3000
	sym7	1.2614	-1.0514	-8.4227e-6	0.3972	3000
	coif5	0.8497	-0.7738	5.9950e-4	0.3204	3000
	bior5.5	2.5249	-2.3573	-0.0070	0.9135	3000
	bior6.8	1.3696	-1.3667	0.0042	0.4776	3000
100	dmey	0.1578	-0.4360	-0.1747	0.2176	3000
	db11	0.3647	-0.6425	-0.1758	0.2714	3000
	sym10	0.5981	-0.8946	-0.1740	0.3125	3000
	coif5	0.3847	-0.6568	-0.1783	0.2739	3000
	bior5.5	0.8561	-1.2599	-0.2012	0.5091	3000
	bior6.8	0.4365	-0.7784	-0.1820	0.3161	3000

和 bior6.8 小波才具有完全对称性。由表 5 和表 6 中方案 1 的滤波效果可判断出所选用小波频率分辨率的高低,亦可按小波频率分辨率定义计算比较<sup>[24]</sup>。60 s 滤波试验中,选用的 coif5 和 dmey 小波频率分辨率较高;100 s 滤波试验中,选用的 coif5、dmey、sym10 和 db11 小波频率分辨率较高。综合小波频率分辨率和对称性二者因素,可判断在 60 s 和 100 s 滤波试验中,选用 dmey 小波的滤波效果为最佳,这与试验结果与 GT-1A 结果差值统计表 5 和表 6 数据相吻合,也与相关文献的研究结果一致<sup>[24]</sup>。

## 4 结论

1) 基于小波包系数频率顺序,本文提出的小波包分解树的优化设计方案是可行的。根据滤波器的截止频率(滤波周期的倒数)、估算的分解层次对应的信号频率范围和小波包系数频率由小到大节点的排列顺序,优化设计小波包分解树,为小波滤波器的设计奠定基础。

2) 选用正交或双正交小波,本文研究、设计的小波低通滤波器,以及提出的阈值处理方案是可行的。滤波试验:60 s 和 100 s 滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的均方差值分别达到约 0.28 mGal 和 0.22 mGal,获得与 GT-1A 系统几乎同样满意的滤波效果。

3) 在低频段,处于不同频带(节点)的小波包系数信噪比不同,应采用不同的方案进行量化处理。在本文提出的 4 种阈值量化处理方案中,方案 2 或方案 3 的滤波效果最佳(相对 GT-1A 系统滤波结果)。

4) 滤波效果与选用小波的频率分辨率和对称

性有关。在滤波试验选中的不同类型的小波中,选用 dmey 小波的滤波器滤波效果最佳(相对 GT-1A 系统);选用 bior5.5 小波的滤波器,方案 2 相较于方案 1 的滤波效果改善幅度相对最大(见表 5)。

与离散 Meyer 小波不同,B 样条小波是双正交的、局部紧支撑、且同样也具有良好的对称性和平滑性。如何构造出比 dmey 小波具有更高频率分辨率的 B 样条小波,进一步提高小波滤波器的滤波效果,有待于后续深入研究。

## 参考文献(References):

- [1] 孙中苗.航空重力测量理论、方法及应用研究[D].郑州:解放军信息工程大学,2004.  
Sun Z M. Theory, Methods and applications of airborne gravimetry [D]. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2004.
- [2] 郭志宏,罗锋,安战锋.航空重力数据窗函数法 FIR 低通数字滤波试验[J].物探与化探,2007,31(6):568-571.  
Guo Z H, Luo F, An Z F. Experiment researches on FIR low pass digital filters based on window functions of airborne gravity data [J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2007, 31(6): 568-571.
- [3] 郭志宏.航空重力数据测量处理方法技术研究[R].“百人计划”项目研究报告.北京:中华人民共和国国土资源部,2008.  
Guo Z H. The method and technology research of airborne gravity survey and data processing[R]. “Hundred People Plan” Project Research Report. Beijing: Ministry of Land and Resources of the People's Republic of China, 2008.
- [4] 王静波.航空重力测量数据处理方法技术研究[D].北京:中国地质大学(北京),2010.  
Wang J B. Methodologies and technology of data processing for airborne gravimetry [D]. Beijing: China University of Geosciences (Beijing), 2010.
- [5] 熊盛青,周锡华,郭志宏,等.航空重力勘探理论方法及应用[M].北京:地质出版社,2010.  
Xiong S Q, Zhou X H, Guo Z H, et al. Theory, methods and ap-

- lication of the airborne gravity prospecting[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2010.
- [6] 王静波,熊盛青,郭志宏,等.航空重力异常估计方法研究[J].物探与化探,2011,35(4):493-498.  
Wang J B, Xiong S Q, Guo Z H, et al. Research on methods of estimating airborne gravity anomaly[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2011,35(4):493-498.
- [7] 郭志宏,罗锋,王明,等.航空重力数据无限脉冲响应低通数字滤波器设计与试验研究[J].地球物理学报,2011,54(8):2148-2153.  
Guo Z H, Luo F, Wang M, et al. The design and experiment of IIR low pass digital filters for airborne gravity data[J]. Chinese J. Geophys., 2011, 54(8):2148-2153.
- [8] 王静波,熊盛青,郭志宏,等.航空重力数据 Kalman 滤波平滑技术应用研究[J].地球物理学进展,2012,27(4):1717-1722.  
Wang J B, Xiong S Q, Guo Z H, et al. Kalman smoothing for airborne gravity data[J]. Progress in Geophysics, 2012, 27(4):1717-1722.
- [9] 罗锋,郭志宏,骆遥,等.航空重力数据的等波纹 FIR 低通滤波试验[J].物探与化探,2012,36(5):856-860.  
Luo F, Guo Z H, Luo Y, et al. Experimental researches on fir lowpass filter based on equiripple[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2012, 36(5):856-860.
- [10] 阮秋琦.数字图像处理学[M].北京:电子工业出版社,2001.  
Ruan Q Q. Digital image processing[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001.
- [11] 罗锋,郭志宏,王明,等.基于 DB 小波阈值去噪的航空重力数据试验[J].物探与化探,2013,37(4):645-654.  
Luo F, Guo Z H, Wang M, et al. Experimental researches on the threshold of airborne gravity data denoising based on DB wavelet transform[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2013, 37(4):645-654.
- [12] 柳林涛,许厚泽.航空重力测量数据的小波滤波处理[J].地球物理学报,2004,47(3):490-494.  
Liu L T, Xu H Z. Wavelets in airborne gravimetry[J]. Chinese J. Geophys., 2004, 47(3):490-494.
- [13] 孙中苗,翟振和.航空重力测量数据的小波阈值滤波[J].武汉大学学报:信息科学版,2009,34(10):1222-1225.  
Sun Z M, Zhai Z H. Filtering of the airborne gravity data by wavelet thresholding[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2009,34(10):1222-1225.
- [14] 李肃义,林君,阳贵红,等.电性源时域地空电磁数据小波去噪方法研究[J].地球物理学报,2013,56(9):3145-3152.  
Li S Y, Lin J, Yang G H, et al. Ground-airborne electromagnetic signals de-noising using a combined wavelet transform algorithm[J]. Chinese J. Geophys., 2013,56(9):3145-3152.
- [15] 章浙涛,朱建军,匡翠林,等.小波包多阈值去噪法及其在形变分析中的应用[J].测绘学报,2014,43(1):13-20.  
Zhang Z T, Zhu J J, Kuang C L, et al. Multi-threshold wavelet packet de-noising method and its application in deformation analysis[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(1):13-20.
- [16] 武粤,孟小红,李淑玲.小波分析及其在我国地球物理学研究中的应用进展[J].地球物理学进展,2012,27(2):750-760.  
Wu Y, Meng X H, Li S L. Wavelet analysis and its application in geophysics of China[J]. Progress in Geophys., 2012,27(2):750-760.
- [17] Misiti M, Misiti Y, Oppenheim G, et al. Wavelet toolbox for use with Matlab (User's Guide Version 1)[M]. The MathWorks, Inc., 1996.
- [18] 关履泰.小波方法与应用[M].北京:高等教育出版社,2007.  
Guan L T. Methods of wavelets and their applications[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.
- [19] Goswami J C, Chan A K. Fundamentals of wavelets: theory, algorithms, and applications[M]. John Wiley & Sons, 2011.
- [20] 吴继忠,花向红,高俊强.基于小波包分解的结构自振特征提取及多路径误差分离[J].武汉大学学报·信息科学版,2010,35(4):486-490.  
Wu J Z, Hua X H, Gao J Q. Feature extraction of structure natural vibration and multipath separation based on wavelet packet decomposition[J]. Geomatics and information Science of Wuhan University, 2010, 35(4):486-490.
- [21] 阎妍,行鸿彦.基于小波包多阈值处理的海杂波去噪方法[J].电子测量与仪器学报,2018,32(8):172-178.  
Yan Y, Xing H Y. Sea clutter de-noising based on wavelet packet multi-threshold method[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2018,32(8):172-178.
- [22] 吕楠楠,苏淑靖,翟成瑞.改进小波包阈值算法在振动信号去噪中的应用[J].探测与控制学报,2018,40(1):119-123.  
Lyu N N, Su S J, Zhai C R. Application of improved wavelet packet threshold algorithm in vibration signal denoising[J]. Journal of Detection & Control, 2018,40(1):119-123.
- [23] Katunin A. B-spline wavelet packets and their application in the multiresolution non-stationary signal processing[J]. Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance, 2010,163(3):103-115.
- [24] 李翔.基于小波分析的测量信号处理技术研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2009.  
Li X. Research on measurement signal processing technology based on wavelet analyse[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2009.
- [25] Katunin A. The construction of high-order b-spline wavelets and their decomposition relations for faults detection and localization in composite beams[J]. Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance, 2011,167(3):43-59.

## Wavelet filter processing in airborne gravimetry

WANG Jing-Bo<sup>1</sup>, XIONG Sheng-Qing<sup>2</sup>, LUO Feng<sup>2</sup>, WANG Guan-Xin<sup>2</sup>

(1. College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100144, China; 2. China Aero Geophysical and Remote Sensing Center for Natural and Resources, Beijing 100083, China)

**Abstract:** Filtering is one of the crucial technologies for data processing in airborne gravimetry. Aimed at the wavelet filtering especially, the authors developed the wavelet low-pass filter for data processing in this paper. Based on the wavelet packet analysis, the wavelet packet tree was optimized according to the signal frequency range of corresponding estimated wavelet packet decomposition level, the desired low-pass cutoff frequency and the node's arranged order on the basis of the "frequency" order of the wavelet packet coefficients from the low frequencies to the high frequencies. The main characteristics of the orthogonal or the biorthogonal wavelets were analyzed, and the new threshold processing schemes were proposed in this paper. The authors made the experimental researches on filtering GT-airborne gravity data using the wavelet filter. The results show that the discrete Meyer wavelet's filtering has achieved the best effect among the wavelets available, and this wavelet filter for airborne gravity data has almost as good satisfactory filtering effect as GT-1A result, with the root-mean squared difference between 0.2 mGal and 0.3 mGal in comparison with GT-1A result.

**Key words:** airborne gravimetry; wavelet packet analysis; low-pass filter; wavelet's properties; threshold processing

(本文编辑:王萌)